

## PROPOSTA DI CORSO DI DOTTORATO PER L'A.A. 2019-2020

ELEONORA CINTI

**TITOLO:** Alcuni problemi nonlocali nelle PDE e nella teoria geometrica della misura  
**DURATA:** 16 ore.

**CONTENUTO del CORSO:** Nel corso si vorrebbero presentare alcuni problemi nonlocali, sia nell'ambito delle PDE nonlineari che nell'ambito della teoria geometrica della misura, e il legame tra di essi. In particolare, lo scopo principale sarebbe quello di descrivere una versione frazionaria dell'equazione di Allen-Cahn (una PDE ellittica semilineare che modella problemi di transizione di fase), dimostrare alcuni risultati sulle proprietà di simmetria unidimensionale di alcune sue soluzioni, e descrivere la relazione che c'è tra tale equazione e la teoria delle superfici minime (classiche) e delle superfici minime frazionarie. Infine, si vorrebbero descrivere alcune proprietà delle superfici minime nonlocali.

Più precisamente, il programma sarà articolato come segue:

- **PARTE INTRODUTTIVA:** un breve richiamo al Laplaciano e alcuni risultati classici per le funzioni armoniche; un'introduzione al Laplaciano frazionario: diverse possibili definizioni, proprietà delle funzioni  $s$ -armoniche, principi del massimo e confronto tra operatori locali e nonlocali; alcuni richiami agli Spazi di Sobolev e introduzione agli spazi di Sobolev frazionari.
- **TRANSIZIONI DI FASE ED EQUAZIONE DI ALLEN-CAHN:** descrizione del modello di Cahn-Hilliard per le transizioni di fase e legame con la teoria delle superfici minime. Analoghi risultati nel mondo nonlocale: l'equazione di Allen-Cahn frazionaria e le superfici minime nonlocali. La congettura di De Giorgi: motivazioni e dimostrazione in dimensioni basse (nel caso locale e nonlocale).
- **SUPERFICI MINIME NONLOCALI:** definizione e alcune proprietà del perimetro frazionario. Classificazione dei coni minimi in dimensione 2 e descrizione, almeno qualitativa, di alcuni risultati recenti in dimensioni più alte.
- **ALCUNI PROBLEMI APERTI** riguardanti le superfici minime nonlocali.

**TITLE: Some nonlocal problems in PDEs and Geometric Measure Theory**  
**DURATION:** 16 ore.

**CONTENT OF THE COURSE:** in this course we will present some nonlocal problems, both in PDEs and Geometric Measure Theory, and the relation between them. More precisely, the aim is to describe the fractional version of the Allen-Cahn equation (an elliptic semilinear PDE which models phase transitions problems), to prove some results concerning the one-dimensional symmetry of certain solutions, and to describe the connection between this equation and theory of minimal surfaces (both classical and nonlocal). Finally, we will describe some properties of nonlocal minimal surfaces.

The program will follow the following scheme:

- **INTRODUCTION:** some preliminaries on the Laplacian and classical results for harmonic functions; The fractional Laplacian: different possible definitions, properties of  $s$ -harmonic functions; maximum principles and comparison between local and nonlocal operators; Sobolev spaces and fractional Sobolev spaces.
- **PHASE TRANSITION MODEL AND THE ALLEN-CAHN EQUATION:** the Cahn-Hilliard model for phase transition and connection with the theory of minimal surfaces. Analogue results in the nonlocal setting: the fractional Allen-Cahn equation and nonlocal minimal surfaces. The De Giorgi conjecture: motivations and proof in low dimensions (both in the local and nonlocal case).
- **NONLOCAL MINIMAL SURFACES:** definition and some properties of the fractional perimeter. Classification of minimal cones in dimension 2 and qualitative description of some results in higher dimensions.
- **SOME OPEN PROBLEMS** about nonlocal minimal surfaces.

#### REFERENCES

- [1] G. Alberti, Variational models for phase transitions, an approach via  $\Gamma$ -convergence, *Calculus of Variations and partial differential equations* (Pisa, 1996), 95–114, Springer, Berlin (2000).
- [2] G. Alberti, A. Ambrosio, X. Cabré, On a long-standing conjecture of E. De Giorgi: symmetry in 3D for general nonlinearities and a local minimality property, *Acta Applicandae Mathematicae*, **65** (2001), 9–33.
- [3] C. Bucur, E. Valdinoci, *Nonlocal Diffusion and Applications*, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, **20**. Springer, [Cham]; Unione Matematica Italiana, Bologna, 2016.
- [4] L. Caffarelli, J.-M. Roquejoffre, O. Savin, Nonlocal minimal surfaces, *Comm. Pure Appl. Math.* **63** (2010), 1111–1144.
- [5] X. Cabré, E. Cinti, Sharp energy estimates for nonlinear fractional diffusion equations, *Calc. Var & PDE*, **49** (2014), 233–269.
- [6] E. Cinti, Flatness results for nonlocal phase transitions, to appear in *Contemporary Research in Elliptic PDEs and Related Topics*, Springer-INdAM Series.
- [7] E. Di Nezza, G. Palatucci, E. Valdinoci, Hitchhiker’s guide to the fractional Sobolev spaces, *Bull. Sci. Math.* **136** (2012), 521–573.
- [8] O. Savin, E. Valdinoci, Regularity of nonlocal minimal cones in dimension 2, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **48** (2013), 33–39.
- [9] O. Savin, E. Valdinoci,  $\Gamma$ -convergence for nonlocal phase transitions, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **29** (2012), 479–500.