Corso di Dottorato:"TEORIA DI HODGE" (Luca Migliorini):

INTRODUZIONE

Il corso riguarda le applicazioni della teoria di Hodge alla Geometria Algebrica. Una speciale enfasi sarà posta sullo "yoga dei pesi" di A. Grothendieck e P. Deligne, basato sull'analogia, notata da J.P. Serre, tra le proprietà del Frobenius in caratteristica positiva e la decomposizione di Hodge in caratteristica zero (congetture di Weil). La teoria di Hodge classica per le varietà Kähleriane sarà rivista velocemente nelle prime lezioni, insieme alle sue applicazioni più importanti, quali le relazioni bilineari di Hodge-Riemann e la scomposizione di Lefschetz. La parte analitica della teoria, d'altronde standard, non gioca alcun ruolo, e verrà data per scontata, o brevemente richiamata se necessario. Verranno invece studiate con cura le variazioni di strutture di Hodge pure, introdotte da P. Griffiths, e le strutture di Hodge miste, introdotte da P. Deligne. Alcune lezioni verranno dedicate alla teoria di Hodge assoluta, anch'essa dovuta a P. Deligne. Il corso rappresenta una rielaborazione, in senso più strettamente algebro-geometrico, di un corso di Dottorato che ho dato nell'autunno 2014 alla Scuola Normale Superiore di Pisa su invito di A. Vistoli.

THE CLASSICAL THEORY OF KÄHLER VARIETIES (~4 ore)

Hodge theory for Kähler manifolds: the (p,q)-decomposition, the three operators L, H, Λ. The Kähler identities. The "Hard Lefschetz theorem" and the Hodge decomposition, the Hodge-Riemann bilinear relations.

SPECIAL FEATURES OF THE PROJECTIVE CASE (~6 ore)

Integral Kähler classes, Kodaira imbedding theorem. A glimpse to vanishing theorems via Hodge theory. The Lefschetz hyperplane section theorem. A proof of the Hard Lefschetz theorem using the Hodge-Riemann bilinear relations and Lefschetz pencils. The algebraic de Rham theorem. Absolute Hodge theory.

MIXED HODGE THEORY (~10 ore)

The yoga of weights: some examples: Serre's remark. Definition of Mixed Hodge structure. Strictness of maps between MHS's. The (abelian) category of MHS.
The two main examples:

- Mixed Hodge structure on the cohomology of a quasi-projective nonsingular variety.
- Mixed Hodge structure on the cohomology of a normal crossing variety.

Sketch of the construction of a MHS on the cohomology of a quasi-projective variety in the general case. Restrictions on weights.

Main consequences of Mixed Hodge theory: the weight trick, the additivity of the weight polynomial. The global invariant cycle theorem, the semisimplicity of monodromy representations. A third proof of Hard Lefschetz via semisimplicity of monodromy and Lefschetz pencils.

VARIATIONS OF HODGE STRUCTURES(~10 ore)

Polarizations. Polarized Weight one PHS's and Abelian varieties (Riemann's characterization of Abelian varieties). The geometry of period domains. Variations of pure Hodge structures. Some properties of the period map: Griffiths' transversality, curvature estimates. The nilpotent orbit theorem and Quasi-unipotency of local monodromy. The limit Mixed Hodge structure associated to a degenerating family. The arithmetic analogue.

REFERENCES

P. Deligne "Travaux de Griffiths" Séminaire Bourbaki 376.

P. Deligne, "Théorie de Hodge, I," Proceedings ICM Nice 1970, Tomo 1, 425-430.

P. Deligne, "Théorie de Hodge, II," Publ. Math. IHES 40 (1971), 5-57.

P. Deligne, "Théorie de Hodge, III," Publ. Math. IHES 44 (1974), 5-78.

P. Deligne, "Poids dans la cohomologie des varietes algebriques," Proceedings ICM Vancouver 1974, 79-84.

P. Deligne, "La conjecture de Weil, II," Publ. Math. IHES 52 (1980), 138-252.

P. Deligne, "Hodge cycles on Abelian varieties," in Hodge cycles, Motives and Shimura varieties, Lect. Notes in Math. 900, Springer Verlag 1982.

J. P. Serre “Analogues Kähleriens des certains conjectures de Weil” Annals of Mathematics vol. 71 no. 2 (1960) 392-394.

Accanto a questi lavori originali, un bellissimo testo che tratta questi argomenti è:

C.Voisin, “Hodge theory and complex algebraic geometry, I, II, Cambridge St. in Adv. Math. 76, 77. Cambridge University Press 2003.